

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVII-a

ETAPA NAȚIONALĂ – 17 mai 2025

Clasa a XI-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1.

O funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se numește *interesantă* dacă este continuă și

$$f(x) \cdot f(2x) = e^{3x+2}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați numerele reale a, b dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{ax+b}$ este *interesantă*.b) Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, este *interesantă*, arătați că $e^{-4x}f(4x) = e^{-x}f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.c) Determinați toate funcțiile *interesante* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.**SOLUȚIE:**a) $f(x) \cdot f(2x) = e^{ax+b} \cdot e^{2ax+b}, f$ continuă 1p

$$3ax + 2b = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1, b = 1$$
 1p

$$b) x \rightarrow 2x \Rightarrow f(2x) \cdot f(4x) = e^{6x+2}$$
 1p

$$f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{f(4x) \cdot f(2x)}{f(2x) \cdot f(x)} = \frac{e^{6x+2}}{e^{3x+2}} \Rightarrow \frac{f(4x)}{f(x)} = \frac{e^{4x}}{e^x} \Rightarrow \text{concluzia.}$$
 1p

$$c) \text{ Fie } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^{-x}f(x), \text{ atunci } g(4x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Rezultă } g(x) = g\left(\frac{x}{4}\right) = g\left(\frac{x}{4^2}\right) = \dots$$

 $= g\left(\frac{x}{4^n}\right), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ 1p

$$\text{Cum } g \text{ este continuă, } \lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{x}{4^n}\right) \Rightarrow g(x) = g(0) = C, C \in \mathbb{R}$$
 1p

Astfel: $f(x) = e^x C, x \in \mathbb{R}$. Condiția dată devine: $C^2 e^{3x} = e^{3x+2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow C = \pm e$. Avem soluțiile

- $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = e^{x+1}$ și
- $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = -e^{x+1}$ 1p

Subiectul 2.

Spunem că matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sunt *prietene* dacă:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Arătați că matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sunt *prietene*.b) Dacă matricele $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comută ($X \cdot Y = Y \cdot X$) demonstrați că:

$$\det(X^2 + Y^2) \geq 0.$$

c) Arătați că orice două matrice *prietene* nu comută între ele.**SOLUȚIE:**

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$
 1p

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Concluzia.}$$
 1p

$$b) X^2 + Y^2 = (X + iY)(X - iY) \Rightarrow \det(X^2 + Y^2) = \det(X + iY) \cdot \det(X - iY) =$$

 $= \det(X + iY) \cdot \overline{\det(X + iY)} = |\det(X + iY)|^2 \geq 0 \Rightarrow \det(X^2 + Y^2) \geq 0$ 2p

c) Prin reducere la absurd, presupunem că există două matrice *prietene*, care comută: $A \cdot B = B \cdot A$ 1p

De la pct. b) știm că: $\det(A^2 + B^2) \geq 0$

Deoarece A și B sunt prietene, avem, din ipoteză, $\det(A^2 + B^2) = 4 - 16 = -12 < 0$ (fals) 1p

Concluzia 1p

Subiectul 3.

a) Fie $a > 0$.

Arătați că $a^x(x - 1) + 1 \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $a = e$.

b) Considerăm funcția $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. Arătați că f este monotonă.

c) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $1 + ax \leq e^x \leq 1 + bx$, pentru orice $x \in (0, 1]$.

SOLUȚIE:

a) Fie $a = e$, considerăm $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x(x - 1) + 1, g'(x) = xe^x$, din tabelul de variație $\Rightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 2p

Reciproc: Fie $h(x) = a^x(x - 1) + 1, \forall x \in \mathbb{R}, \text{cum } h(0) = 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = 0$ punct de

^{Fermat} minim $\Rightarrow h'(0) = 0 \Rightarrow a = e$ 1p

b) $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} > 0$, conform a) 2p

c) Condiția este echivalentă cu $a \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq b, \forall x \in (0, 1]$, deci $a \leq \inf f, b \geq \sup f$ 1p

$\Rightarrow a \leq 1$ și $b \geq e - 1 \Rightarrow a \in (-\infty, 1], b \in [e - 1, \infty)$ 1p

Subiectul 4.

Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$, definim $\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$.

Andrei, pasionat de matematică, a realizat o schiță a grădinii sale. Schița grădinii este raportată la un reper cartezian xOy . El vrea să îngrădească o suprafață triunghiulară determinată de trei puncte A, B, C de abscise a, b, c numere naturale diferite oricare două, situate pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$. La un centimetru de pe schiță corespund 20 m pe teren. Se cere:

a) Arătați că $\Delta(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$.

b) Arătați că punctele A, B, C sunt necoliniare.

c) Determinați aria minimă a suprafeței îngrădite de Andrei.

SOLUȚIE:

a) $\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y - x & z - x \\ x^3 & y^3 - x^3 & z^3 - x^3 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y^2 + xy + x^2 & z^2 + xz + x^2 \end{vmatrix} =$

$(y - x)(z - x)(z^2 + zx - y^2 - xy) = (x - y)(z - x)(y - z)(x + y + z)$ 2p

b) $A(a, a^3), B(b, b^3), C(c, c^3)$ coliniare dacă $\Delta(a, b, c) = 0$ 1p

Atunci $(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c) = 0$, fals ($a, b, c \in \mathbb{N}$, distincte), concluzia. 1p

c) $A_{ABC} = \frac{1}{2} |\Delta(a, b, c)| = \text{minimă}$

- $a - b, b - c, c - a$ nu pot fi toate impare (altfel $(a - b) + (b - c) + (c - a) = \text{impar}$, fals) deci $\Delta(a, b, c) : 2$ 1p

- Dacă două dintre numerele a, b, c împărțite la 3 dau același rest, atunci diferența lor se divide la 3. Dacă nu există două numere care împărțite la 3 să dea același rest, atunci dau resturile 0, 1, 2 și atunci $a + b + c : 3$, astfel $\Delta(a, b, c) : 3$ 1p



Rezultă $|\Delta(a, b, c)| : 6$ și cum $|\Delta(0, 1, 2)| = 6$, deducem că A_{ABC} minimă este 3 cm^2 , pe schiță.

A_{ABC} , pe teren, este $3 \cdot (20 \text{ cm})^2 = 1200 \text{ m}^2$.

1p

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător